МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»

Физико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан ____________ Р.А. Бостанов

«04» ___июля___ 2023 г.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по изучению дисциплины,
решению задач, задачи для самостоятельного решения

Карачаевск, 2023

Рекомендовано учебно-методической комиссией физико-математического

факультета КЧГУ имени У.Д. Алиева

Булатова Э.М. **Элементарная математика.** Учебно- методические рекомендации. Карачаевск: изд-во КЧГУ, 2023. – с.52

Рецензент: *Гербеков Х.А.* канд. пед. наук, доцент

В методических рекомендациях изложены теоретические и практические основы решения уравнений, неравенств и их систем. Основные положения в рекомендациях дополнены примерами с решениями и задачами для самостоятельной работы.

Предназначается для преподавателей, студентов, учителей и старшеклассников, специализирующихся по математике.

ВВЕДЕНИЕ

В методических рекомендациях рассматриваются различные алгебраические уравнения и неравенства, а также их систем. Обращается внимание на теоремы, позволяющие перейти от данного уравнения (неравенства) к другому, не нарушая равносильности.

Дается классификация уравнений. В данных методических рекомендациях приводятся разнообразнее алгебраические уравнения, неравенства, а также их системы. Особо выделены уравнения и неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Обращено внимание на методику их решения.

Среди алгебраических уравнений и неравенств важную роль играют иррациональные уравнения и неравенства. Как показывает опыт, решение такого вида уравнений и неравенств вызывает у многих затруднение. В работе акцентируется внимание на способах их ранения, обращается внимание на отыскание более рациональных приемов их решения. В каждом параграфе рассматриваются задачи повышенной трудности.

Для закрепления материала предлагаются упражнения я задачи для самостоятельной работы.

Как покапывает многолетний опыт преподавания, у учащихся и студентов вызывает затруднение решение уравнений и неравенств, содержащих параметры. В методических рекомендациях этому вопросу уделено особое внимание. Предлагаются также задачи, решение которых приводит к составлению уравнений, неравенств и их систем. Такие примеры имеются почти во всех параграфах.

Упражнения, предложенные для самостоятельного решения, снабжены указаниями или ответами.

§ 1. Определение уравнения, его решения, теоремы о равносильности уравнений

Если даны две функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ и требуется найти значение аргумента, при которых функции принимают равные значения, то пишут $f(x) = \varphi(x)$ и это условное равенство называют уравнением.

Областью определения уравнения называют пересечение областей определения функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$. Иногда говорят и так: область допустимых значений неизвестного (переменной). Если при $x=a$ $f(a) = \varphi(a)$, то число a называют корнем уравнение $f(x) = \varphi(x)$.

Решением уравнения называют множество всех его корней. Это множество может быть конечное (в частности, пустое) и бесконечное.

Пример. $x(x-1)(x-5)=0$ - это уравнение имеет конечное множество решений $\{0; 1; 5\}$. Уравнение $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ имеет бесконечное множество решений. Уравнение $x^2 + 5 = 0$ не имеет решений в области действительных чисел.

Замечание. Иногда на область определения уравнения накладываются дополнительные ограничения. Например, находят только натуральные корни или только рациональные или как в предыдущем примере, действительные (оказалось пустое множество).

Геометрический смысл уравнения и его решения.

Данному уравнению соответствуют графики двух функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, а его корням соответствуют абсциссы общих точек этих графиков.

Классификация уравнений.

Функцию, заданную в явном виде, называют алгебраической, если над аргументами не выполняются иные действия, кроме сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень с целым показателем, извлечения корня с натуральном показателем, причем число этих операций - конечное число.

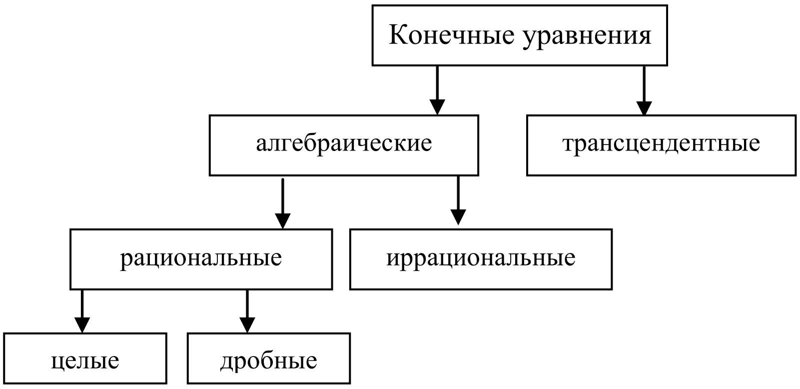
В зависимости от вида функций различают уравнения алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Уравнение называет алгебраическим, если обе функции *f(x)* и $\varphi(x)$ являются алгебраическими. Если хотя бы одна из них трансцендентна, то уравнение называют трансцендентным.

Примеры:

1) $\frac{x}{x^2-1}\sin 3 = lg2$ - алгебраические уравнения;

2) $x^{\sqrt{2}} = x$ - неалгебраические уравнения.



Теоремы о равносильности уравнений.

Определение. Два уравнения называются равносильными, если они, имеют одно и то же множество решений.

Замечание. Два уравнения могут быть равносильными в одной области и неравносильными в другой.

Пример. Уравнения $x\text{-}1=0$ и $(x-1)(x^2+1)=0$ равносильны во множестве действительных чисел и не являются равносильными во множестве комплексных чисел.

Теорема 1. Если к обеим частям уравнения $f(x) = \varphi(x)$ прибавить функцию *g(x)*, не изменяющую область определения уравнения, то получится новое уравнение $f(x) + g(x) = \varphi(x) + g(x)$ равносильное данному.

Пример.

$$x - \frac{1}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1} \qquad (1)$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$x = 1 \qquad (2)$$

Область определения уравнения (1) - все множество действительных чисел, кроме $x=1$, область определения уравнения (2) -любое число.

Заметим, что уравнения (1) и (2) не являются равносильными, т.к. не выполнено условие теоремы 1.

Теорема 2. Если обе части уравнения $f(x) = \varphi(x)$ умножить на функцию $g(x)$, не изменяющую области определения данного уравнения и не обращающуюся в нуль, то получится новое уравнение $f(x)g(x) = \varphi(x)g(x)$ равносильное данному.

Пример.

$$2x+1=x \qquad (1)$$

$$g(x)=x-2$$

$$(2x+1)(x-2)=x(x-2) \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) являются неравносильными, т.к. функция $g(x)=x-2$ обращается в нуль в области определения уравнения(1).

В то же время уравнение *(1)* равносильно уравнению $(2x+1)(x^2+1)=x(x^2+1)$ *в* области действительных чисел.

§2. Целые алгебраические уравнения.

Общий вид уравнения n - степени:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

В школьном курсе алгебры изучаются уравнения первой и второй степени, в курсе "Алгебра и теория чисел" студенты подробно знакомятся с решением уравнений третьей и четвертой степени.

В прошлом веке учеными Абелем и Галуа было доказано, что при $n > 4$ уравнения в общем виде в радикалах неразрешимы. Естественно выделить такие уравнения высших степеней, которые в радикалах разрешимы.

а) Двучленные уравнения: $ax^n+b=0$

б) Трехчленные уравнения: $ax^{2n}+bx^n+c=0$

в) Некоторые виды возвратных уравнений:

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+cx^2+bx+a=0$ -возвратное уравнение I рода

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots-cx^{2-}bx-a=0$ - косовозвратное уравнение;

$ax^{2n}+bx^{2n}-^1+cx^{2n-2}+\ldots+cx^2-bx+a=0$ - возвратное уравнение II рода.

При решении таких уравнений используют теоремы.

Теорема 1. Возвратное уравнение I рода нечетной степени имеет корень $x=-1$, причем после деления многочлена, стоящего в левой части уравнения на $(x+1)$ получается снова возвратное уравнение.

Теорема 2. Всякое, косовозвратное уравнение имеет корень $x=-1$, после деления уравнения на $(x-1)$получается снова возвратное уравнение.

Теорема 3. Возвратное уравнение II рода, степень которого не кратка 4, имеет корни $x_1=i$, $x_2=-i$, причем после деления его на (x^2+1)получается снова возвратное уравнение II рода степени, кратной 4.

Теорема 4. (О понижении степени возвратных уравнений).

Если возвратное уравнение имеет четную степень, то степень уравнения можно понизить в два раза, причем для возвратных уравнений I рода и косовозвратных осуществляется с помощью подстановки $y=x+\frac{1}{x}$, а для возвратных уравнений II рода с помощью подстановки $y=x-\frac{1}{x}$.

Упражнения.

1. Решить уравнение:

$6x^5-17x^4+9x^3+9x^2-17x+6=0.$

Данное уравнение являете возвратным I рода нечетной степени, имеет корень $x=-1$. Разделив уравнение *на* $x+1$, получим уравнение

$6x^4-23x^3+32x^2-23x+6=0$. Осуществляем подстановку $x+\frac{1}{x}=y$, разделив предварительно на x^2.

$6x^2-23x+32-\frac{23}{x}+\frac{6}{x^2}=0,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$

Таким образом, относительно y получим уравнение второй степени;

$6y^2-23y+20=0.$

После этого находим x, пользуясь подстановкой.

Ответ: $\left\{1; 2; 0{,}5; \frac{2-i\sqrt{3}}{3}; \frac{2+i\sqrt{3}}{3}\right\}$.

2. $x^6+3x^5-2x^4+0x^3+2x^2-3x-1=0.$

3. $x^6+4x^5-3x^4+0x^3-3x^2-4x+1=0$

Указание. Для решения этих уравнений воспользуйтесь теоремами *2* и 3, и затем теоремой 4.

§3. Дробные алгебраические уравнения

Всякое дробное рациональное уравнение путем тождественных преобразований можно представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, где *P(x), Q(x)* -многочлены.

Теорема 1. Уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases}$.

Следствие. Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - несократимая дробь, то уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ равносильно уравнению *P(x)=0* .

Теорема 2. Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сократима на *d(x)=НОД (P(x), Q(x))* , то получится новое уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, которое будет следствием данного уравнения, не всегда будет равносильно данному.

Пример. Решить уравнение:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{3}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1}.$$

После тождественных преобразований получим $\frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = 0$.

Исходное уравнение не будет равносильно уравнению $\frac{x-1}{x+2} = 0,$ так как область определения данного уравнения-все множество чисел, кроме *x=1 и x=-2.* После тождественных преобразований получено уравнение, область определения которого $x \neq -2.$

Решением второго уравнения является *x=1* , что не является, однако, решением исходного уравнения.

Об уравнениях, содержащих параметр.

Решить уравнение, содержащее параметры - это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения.

Пример 1.

Решить уравнение: $x=4x^2+8ax^2+4a^2x^2$

$$4x(1+2a+a^2)=1.$$

Получаем, что $x = 0$ при любом a, при $a \neq -1$ $x = \frac{1}{4(a+1)^2}$, при $a=-1$ решение уравнения $x=0$.

Пример 2.

$$x^3+2x^2(1-b)+x(1-a)=0.$$

$x_1=0$ при любых a и b.

$$x^2+2x(1-b)+(1-a)=0 \ldots \quad (*)$$

$$x_{2,3}=b-1\mp\sqrt{b^2-2b+a}\ , \qquad b^2-2b+a \geq 0.$$

Решение квадратного неравенства в области действительных чисел зависит от знака дискриминанта и первого коэффициента.

Если $1-a \leq 0$, т.е. $a \geq 1$, то неравенство $b^2-2b+a \geq 0$,

выполняется при любых значениях b. Следовательно, при $a \geq 1$ и любом b уравнение (*) имеет решением $x_{2,3}$.

Если $a< 1$, то решение неравенства при $b < 1-\sqrt{1-a}$ и $b> 1+\sqrt{1-a}$.

Итак, при $a< 1$ и $b < 1-\sqrt{1-a}$ или $a< 1$ и $b> 1+\sqrt{1-a}$ решением уравнения (*) будут также $x_{2,3}$.

Пример 3.

$$\frac{x}{n-1}+1=0.$$

Ответ: $x=1-n$ при $n\neq 1$, при $n=1$ уравнение не имеет решений.

§4. Алгебраические нетождественные неравенства

Определение. Если даны две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ и требуется найти значение аргумента x, при котором $f(x) > \varphi(x)$ или $f(x) < \varphi(x)$, то говорят, что дано неравенство, требующее решения.

Решением данного неравенства называют множество значений аргумента, удовлетворяющих неравенству.

Как и уравнение, неравенство рассматривается на общей части областей определения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.

При решении неравенств используются теоремы, аналогичные теоремам, которые дают возможность перейти от одного уравнения к другому, равносильному.

Системой неравенств называется совокупность двух или нескольких неравенств, рассматриваемых над одним и тем же числовым множеством. Решением системы называют пересечение решений всех ее неравенств.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 3ax - 5 > 6 - ax & (1) \\ (a+1)x - 8 > (1-2a)x & (2) \end{cases}$$

Неравенство *(1)* после преобразований приводится к виду $4ax > 11$, откуда

$x > \frac{11}{4a}$. при $a > 0$

$x < \frac{11}{4a}$ при $a < 0$

нет решения при $a = 0$.

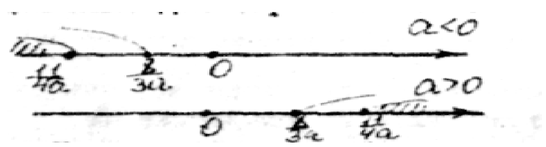
Неравенство (2) приводится к виду $3ax > 8$, откуда

$x > \frac{8}{3a}$. при $a > 0$

$x < \frac{8}{3a}$ при $a < 0$

нет решения при $a = 0$.

Для нахождения решения системы воспользуемся числовой прямой:



Ответ: при $a<0$ $x\in(-\infty;\frac{11}{4a})$

при $a>0$ $x\in(\frac{11}{4a};+\infty)$

при $a=0$ нет решения.

Неравенство второй степени имеет общий вид $ax^2+bx+c>0$, где $\neq 0$.

Решение основано на теореме о знаке квадратного трехчлена. Если дискриминант *Д* функции у=ax^2+bx+c меньше нуля, то знак функции совпадает со знаком ее первого коэффициента при всех значениях x. Если *Д=0*, то знак функции совпадает со знаком a при всех значениях x, кроме значений, равных кратному корню. Если *Д> 0*, то знак квадратного трехчлена совпадает со знаком a вне отрезка (x_1,x_2) и противоположен знаку a внутри этого отрезка. Причем для определенности удобно обозначить меньший корень через x_1, больший - x_2.

Пример 1. Решить неравенство:

$$x^2 - 4x + 3 < O$$

Д= 4 > 0 , $x_1=1$, $x_2=3$. Решением неравенства служит интервал (1;3)

Пример 2.

$$(3k-1)x^2-2(2k-1)x+2k-1>0.$$

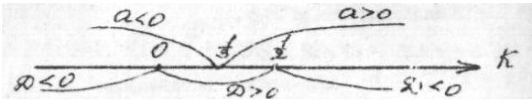
Определим знак первого коэффициента $a=3k-1$: 0 при $k=\frac{1}{3}$, больше нуля при $k>\frac{1}{3}$, меньше нуля при $k<\frac{1}{3}$.

Исследуем дискриминант $Д=4(-2k^2+k)$, $Д = 0$ при $k= 0$ или $k=\frac{1}{2}$.

$Д>0$ при $0<\kappa<\frac{1}{2}$

Д< О при $k<0$ или $k>\frac{1}{2}$.

Отметки на числовой оси значения параметра k и соответствующие значения первого коэффициента и дискриминанта.



Для удобства используем таблицу

k	*a*	*Д*	*Решение f(x)>0*
$(-\infty;0)$ 0	- -	- *0*	нет решения
$(0;\frac{1}{3})$	-	+	$(x_1;x_2)$
$\frac{1}{3}$	*0*		Имеем неравенство I ст. $x>\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$	+	+	$x<x_1$ *или* $x>x_2$
$\frac{1}{2}$	+	*0*	$(-\infty;x_{1,2})\cup(x_{1,2};+\infty)$
$(\frac{1}{2};\infty)$	+	-	любое число

Заметим далее ,что при $k<\frac{1}{3}$ $x_1=\frac{2k-1+\sqrt{Д}}{3k-1}$, $x_1=\frac{2k-1-\sqrt{Д}}{3k-1}$

при $k>\frac{1}{3}$ они меняются ролями.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $x^2-2(4m+3)x+15m^2+28m+6>0.$
2. $(m+1)x^2+mx+m<0.$
3. $kx^2+x+1>0.$
4. $x^2+kx+1<0.$
5. $(m-1)x^2+2mx+9m-5<0.$
6. $ax^2+(2a+1)x+a+2>0.$

§5. Целые алгебраические неравенства выше второй степени.

Общий вид:

$$x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n>0, \qquad n>2$$

$$(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\ldots(x-\alpha_k)^{m_k}>0$$

Знак квадратного трехчлена совпадает со знаком 1 коэффициента, если *Д*< *0*. Такие трехчлены можно опустить, не нарушая равносильности неравенства. Кроме того можно опустить линейные множители в четных степенях.

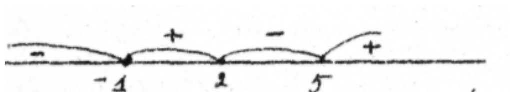
Далее при решении используется метод интервалов.

Пример. Решить неравенство:

$$(x^2+x+1)^2(x^2-4x-5)^3(x-2)(x-\frac{1}{2})^{\frac{1}{4}}>0$$

Это неравенство равносильно такому:

$(x-2)(x+1)(x-5)>0$, причем $x \neq \frac{1}{2}$.



Ответ: $\left(1;\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2};2\right) \cup (5;+\infty)$.

§6. Дробные рациональные, неравенства

Общий вид $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, где *P(x)* и *Q(x)*- многочлены. Решение основано на том, что такие неравенства равносильны соответственно следующим целым неравенствам:

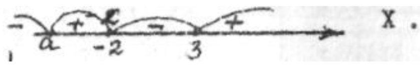
$P(x)Q(x)>0$ или $P(x)Q(x)<0$.

Пример. Решить неравенство:

$\frac{x^2+(2-a)x-2a}{x-3} > 0$, оно равносильно неравенству:

$(x^2+(2-a)x-2a)(x-3)>0$ или $(x+2)(x-a)(x-3)>0$, причем параметр *a* принимает любые значения.

а) $a < -2$

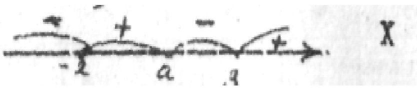


Тогда $x \in (a;2) \cup (3;+\infty)$.

б) $a=-2$, неравенство примет вид $(x+2)^2(x-3) > 0$, следовательно, при

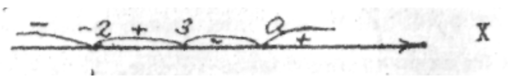
$a=-2$ $x \in (3;+\infty)$.

в) $-2<a<3$



$x \in (-2;a)$ или $x \in (3;+\infty)$.

г) в таком случае неравенство примет вид $(x+2)(x-3)^2 > 0$. Следовательно, $x \in (-2;3) \cup (3;+\infty)$.



д) $a>3$

$x \in (-2;3) \cup (a;+\infty)$.

Следовательно, получено решение для всех значений параметра.

Пример 2. Решить неравенство:

$$\frac{p}{x} - \frac{1}{x-1} > 1.$$

Неравенство преобразуется к виду $\frac{x^2-px+p}{x(x-1)} < 0$, которое равносильно $P=x(x-1)(x^2-px+p)<0$.

Определим знак дискриминанта функции $f(x)=x^2-px+p$.

$$Д = p(p-4) \begin{cases} = 0 \text{ при } p=0 \text{ или } p=4 \\ < 0 \text{ при } 0<p<4 \\ > 0 \text{ при } p<0 \text{ или } p>4. \end{cases}$$

1. При $0<p<4$ $f(x)>0$ при всех x, поэтому решением данного неравенства служит интервал $(0;1)$.

2. При $p=0$ $f(x)=x^2>0$ при $x \neq 0$.

3. При $p=-4$ $f(x)=(x-2)^2>0$ при $x \neq 2$.

Итак, в случаях 2 и 3 неравенство имеет решение $0 < x < 1$.

4. При $p<0$ $f(x)$имеет неравные корни спротивоположными знаками. Меньший отрицательный корень обозначим через x_1 . Сравним эти корни с числами 0 и 1, обращающими в 0 произведение $x(x-1)$. $f(0)=p<0$, $f(1)$=1>0, следовательно, 1 расположена вне отрезка $[x_1;x_2]$. Следовательно, $x_1 < 0 < x_2 < 1$. Далее определим знак P в каждом интервале:

Интервалы	x	$x-1$	$f(x)$	P	Вывод
$(-\infty;x_1)$	-	-	+	+	Итак, при $p<0$ неравенство справедливо в интервалах $(x_1;0)$ или $(x_2;1)$.
$(x_1;0)$	-	-	-	-	
$(0;x_2)$	+	-	-	+	
$(x_2;1)$	+	-	+	-	
$(1;+\infty)$	+	+	+	+	

5. При $p>4$ $f(x)$ имеет два положительных корня x_1и x_2 , причем хотя бы один из них больше 1, т.к. $x_1 + x_2$ =p>4, а $f(1)=1$, поэтому 1 расположена вне отрезка $[x_1;x_2]$. Из сказанного вытекает, что $0 < 1 < x_1 < x_2$.

Далее аналогично определяем знак P в каждом интервале и обнаруживаем, что при $p>4$ неравенство выполняется в интервалах (0; 1) или $(x_1;x_2)$. Остается записать корни $f(x)$: $x_{1,2}=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4p}}{2}$ и выяснить, что при всех значениях p меньшие корень будет $x_1=\frac{p-\sqrt{p^2-4p}}{2}$.

Упражнения.

1. При каких значениях параметра a оба корня функции $f(x)=x^2+(2a-1)x+a^2-1$ отрицательны ?

2. При каких значениях параметра p функция $f(x)=x^2+3px+2p^2-1$ принимает отрицательные значения в интервале $0<x<1$?

3. Решить неравенство: $\frac{a}{x-3}+\frac{x}{x+3}>\frac{18}{x^2-9}$.

4. $\frac{2}{x}+\frac{3}{a}<\frac{2}{x+3a}$.

5. $\frac{ax^2}{x-1}-2a<a^2+1$.

§7. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Всякое уравнение и неравенство, содержащее неизвестное под знаком модуля, можно заменить совокупностью двух или нескольких систем уравнений и неравенств без модульных скобок, используя следствие из определения модуля действительного числа. Пример I. Решить уравнение:

$|x| = 2|x-4| + x - 2$.

Уравнение равносильно совокупности трех систем

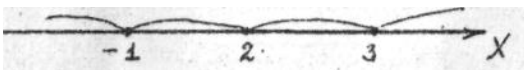
$\begin{cases} x<0 \\ -x=-2x+8+x-2 \\ \text{нет решения} \end{cases}$ $\begin{cases} 0\le x<4 \\ x=-2x+8+x-2 \\ x=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 4 \\ x=2x-8+x-2 \\ x=5 \end{cases}$

Ответ: {3;5}.

Пример 2. Решить неравенство:

$|x^2-2x-3|+2|x-2|<5.$

Предварительно находим корни функций, стоящих под знаком модуля. Это числа -1;2; 3 , которые разбивают числовую прямую на 4 интервала.



Данное неравенство равносильно совокупности 4 систем.

а) $\begin{cases} x<-1 \\ x^2-2x-3-2x+4<5 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1 \\ x^2-4x-4<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-1 \\ 2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2} \end{cases}$ Эта система не имеет решений.

б) $\begin{cases} -1 \le x < 2 \\ -x^2 + 2x + 3 - 2x + 4 < 5 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \le x < 2 \\ x < -\sqrt{2} \text{ или } x > \sqrt{2} \end{cases}$

Получаем, что $\sqrt{2 < x < 2}$.

в)$\begin{cases} 2 \le x < 3 \\ -x^2 + 2x + 3 + 2x - 4 < 5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le x < 3 \\ x^2 - 4x + 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2 \le x < 3.$

г)$\begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 2x - 3 + 2x - 4 < 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 3 \\ -2\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3} \end{cases}$

Решение этой системы $3 \le x < 2\sqrt{3}$

Ответ: $x \in (\sqrt{2}; 2) \cup [2; 3) \cup [3; 2\sqrt{3})$ т.е. $x \in (\sqrt{2}; 2\sqrt{3})$.

Пример 3.

Решить неравенство: $|2x + a| > \frac{3}{2}a + |x - a|$.

Это неравенство содержит параметр. Корни функции - $\frac{a}{2}$ и a . Следует рассмотреть три случая.

Первый случай *a>0*

Тогда a>-$\frac{a}{2}$

$$\begin{cases} x < -\frac{a}{2} \\ -2x - a > \frac{3}{2}a - x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{a}{2} \\ x < -\frac{7}{2}a \end{cases} \Rightarrow \quad x < -\frac{7}{2}a$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} \le x < a \\ 2x + a > \frac{3}{2} - x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2} \le x < a \\ 3x > \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} < x < a$$

$$\begin{cases} x \ge a \\ 2x + a > \frac{3}{2}a + x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge a \\ x > -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad x \ge a.$$

при a>o $x \in \left(-\infty; -\frac{7}{2}a\right) \cup \left(\frac{a}{2}; +\infty\right)$.

Второй случай *a<0.*

$$\begin{cases} x < a \\ -2x - a > \frac{3}{2}a - x + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < a \\ x < -\frac{7}{2}a \end{cases} \Rightarrow \quad x<a$$

$$\begin{cases} a \le x < -\frac{a}{2} \\ -2x - a > \frac{3}{2}a + x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le x < -\frac{a}{2} \\ x < -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow a \le x < -\frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} x \ge -\frac{a}{2} \\ 2x + a > \frac{3}{2}a + x - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{a}{2} \\ x > -\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow x > -\frac{a}{2}$$

$$a < 0 \qquad x \in R \backslash \left\{-\frac{a}{2}\right\}$$

$$a = 0 \qquad |2x| > |x| \quad \Rightarrow \quad x \in R \backslash \{0\}.$$

Пример 4. Решить уравнение:

$$\left|x + \frac{n}{x} - m - 1\right| = (-1)^n \left(x + \frac{n}{x} - n - 1\right).$$

где n - целое число.

1) При n четном $\left|x + \frac{n}{x} - n - 1\right| = x + \frac{n}{x} - n - 1$, что возможно лишь при $x + \frac{n}{x} - n - 1 \ge 0$ и, следовательно, равносильно неравенству $x(x-1)(x-n) \ge 0$. Последнее выполняется при $n< 0$ в интервалах $n \le x < 0$ и $1 \le x < +\infty$; при $n= 0$ в интервале $1 \le x < +\infty$;

при $n>1$ в интервалах $0 < x \le 1$ и $n < x < +\infty$.

2) При нечетном n имеем:

$\left|x + \frac{n}{x} - n - 1\right| = -(x + \frac{n}{x} - n - 1)$, что возможно при $x + \frac{n}{x} - n - 1 \le 0$ и, следовательно, при $x(x-1)(x-n) \le 0$. Используя предыдущие результаты, получаем его решение:

при $n < 0$ $\qquad -\infty < x < n$ или $0 < x \le 1$;

при $n = 1$ $\qquad -\infty < x < 0$;

при $n > 1$ $\qquad -\infty < x < 0$ или $1 < x < n$.

Упражнения для самостоятельного решения.

1. Построить график функции:

$y = -x^2 + 3|x|$.

2. Решить неравенство:

$|x^2 - 4x + 3| - 2|x + 1| > x^2 - 3x$.

3. Решить неравенство:

$\frac{4-x}{x+6} < 3$.

4. Решить неравенство относительно x, где a- параметр:

$|x - 3a| < |x - a| - 2a$.

§ 8. Задачи, решаемые с помощью составления уравнений и неравенств

Задача 1.

Из двух пунктов А и В навстречу друг другу движутся два автомобиля, причем первый выпел раньше второго на 1,5 часа, но проходя в час на 9 км меньше второго. К моменту встречи первый прошел на 30 км больше второго. После встречи автомобили двигались с прежними скоростями и прибыли одновременно первый в пункт А, а второй - в пункт В. Определить расстояние АВ.

Решение.

Пусть x км/ч - скорость 1-го автомобиля, тогда $(x + 9)$ км/ч -скорость 2-го автомобиля; y ч - время пребывания в пути 1-го автомобиля до встречи со вторым.

Исходя из того, что до встречи первый автомобиль прошел на 30 км больше, можно составить уравнение:

$$xy - (x+9)(y-1{,}5) = 30. \qquad (1)$$

В задаче сказано, что после встречи они находились в пути одинаковое число часов. На основании этого можно составить уравнение:

$$\frac{(x+9)(y-1{,}5)}{x} = \frac{xy}{x+9} \qquad (2);$$

Таким образом, имеем систему из уравнений (1)и (2). Из первого уравнения находим, что $x=11+6y$.

Подставляя это значение во второе уравнение, получим;

$$(20+6y)^2(y-1{,}5) = (11+6y)^2 y.$$

Решив систему, получим $x = 36$, $y=\frac{25}{6}$

Далее вычисляем скорость 2-го автомобиля - 45 км/ч, а время пребывания его в пути до встречи с первым - 2 ч. 40 мин. Расстояние между пунктами 270 км.

Задача 2.

В поселок ежедневно приходят не менее 2 писем и не более 3 телеграмм. За первый месяц года суммарное количество полученных писем было больше, чем количество телеграмм, а за весь год наоборот. Доказать, что в один ив дней года эти количества совпадают.

Решение.

Пусть x- число писем в день, y- число телеграмм в день, причем $x \geq 2, y < 3$.

В течение первого месяца года число писем $P \geq 62$, число телеграмм $T \leq 93$, по условию $P>T$, следовательно, $T<62$.

Итак, $P \geq 62$, $T < 62$. Значит, ни в один ив дней первого месяца количества их не совпадут.

За год писем $P_1 \geq 2 * 365 = 730, \text{т.е.}\, P_1 \geq 730$, число телеграмм $T_1 \leq 1095$, $T_1 > P_1$, $730 < T_1 \leq 1095$

$\frac{730}{365} < \frac{T_1}{365} \leq \frac{1095}{365}$ следовательно, $2 < y \leq 3$.

Итак, в один из дней года будет прислано 3 письма и 3 телеграммы.

Задача 3.

Парашютист покинул самолет на высоте 5000 м и через 5 мин приземлился в заданном районе. Определить время его снижения до раскрытия парашюта и с раскрытым парашютом, если средняя скорость снижется с раскрытая парашютом 7 м/сек. Сопротивлением воздуха на участке снижения без парашюта пренебречь.

Решение.

Пусть t сек парашютист падал, не пользуясь парашютом: по закону свободного падения он снизился за это время на $h_1 = \frac{gt^2}{2}$м. 0ставиееся расстояние до земли $h - h_1$ он прошел со скоростью $v=7$ м/сек за $(300-t)$сек, следовательно, $h-h_1=7(300-t)$

т.е. $5000 - \frac{gt^2}{2} = 2100 - 7t$ или $4{,}9t^2-7t-2900=0$.

Решая это квадратное уравнение, получаем $t_1 \approx 24, t_2 \approx -23$.

Отрицательный корень не удовлетворяет условно задачи, поэтому 24 сек. парашютист падал свободно, остальные 276 сек. спускался с парашютов.

Задача 4.

Катер с экскурсантами должен совершить прогулочный рейс по реке от пункта А до пункта В и обратно не более, чем за 3 часа. Какую собственную техническую скорость должен иметь катер, если скорость течения реки 5 км/ч, расстояние от А до В 28 км и остановка в пункта В делится 40 мин.?

Решение.

Пусть собственная скорость катера x км/ч, тогда по течению катер будет идти со скоростью $(x+5)$ км/ч, против течения со скоростью $(x-5)$ км/ч и весь рейс с остановкой в пункте В совершит за время $t = \frac{28}{x+5} + \frac{28}{x-5} + \frac{2}{3}$ часов. По условию $t \leq 3$, следовательно, $\frac{28}{x+5} + \frac{28}{x-5} + \frac{2}{3} \leq 3$.

Понятно, что скорость катера больше скорости течения, поэтому числа $(x+5)$ и $(x-5)$ положительные, умножая обе части неравенства на $(x+5)(x-5)$ и выполняя тождественные преобразования, получим равносильное неравенство $x^2 - 24x - 25 \geq 0$.

Функция $y = x^2 - 24x - 25$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 25$, поэтому неравенство будет выполняться при $x \leq -1$ или $x \geq 25$. Следовательно, собственная скорость катера должна быть не менее 25 км/ч.

Задачи для самостоятельного решения

1. Мастер и его ученик должны были выполнить работу к определенному сроку. Однако, когда была выполнена половина работы, ученик заболел, и мастер, оставшись один, закончил работу с опозданием на 2 дня. За сколько дней мог бы выполнить работу каждый из них, работая один, если мастеру на это потребовалось бы на 5 дней меньше, чем ученику?

Ответ: 10 ч; 15 ч.

2. Из двух городов, расстояние между которыми 80 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два автомобиля. Один из автомобилей приезжает в В через 20 мин после встречи, а другой в А через 45 мин после встречи. Найти скорость каждого автомобиля.

Ответ. 50 км/ч, 40 км/ч.

3. В равносторонний треугольник со стороной *а* надо вписать прямоугольник наибольшей площади. Какими должны быть стороны этого прямоугольника?

Ответ. $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

4. Доказать, что правильный шестиугольник имеет большую площадь, чем квадрат с тем же периметром. \

5. С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый пассажир первую половину времени шел со скоростью *a* км/ч, а вторую половину времени со скоростью *b* км/ч. Второй пассажир первую половину пути шел со скоростью *b* км/ч, а вторую - со скоростью *a* км/ч. Который из пассажиров пришел раньше к месту назначения?

Ответ. Первый.

§9. Система и совокупности уравнений и неравенств

В математике различают понятия - системы и совокупности уравнений. Система уравнений имеет вид:
$$\begin{cases} F_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ F_k(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases}$$

Совокупность уравнение:
$$\left[\begin{array}{l} F_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ F_k(x, y, \dots, z) = 0 \end{array}\right.$$

Решением системы уравнений называют множество допустимых наборов значений неизвестных $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ при условии, что любой такой набор удовлетворяет всем уравнениям системы.

Решением совокупности уравнений называют множество наборов значений неизвестных $(x_0, y_0, \dots, z_0)$, любой из которых удовлетворяет хотя бы одному из уравнений совокупности.

Областью определения системы является пересечение областей определения всех уравнений системы.

Определение. Две системы уравнений (две совокупности) называют равносильными, если имеют одно и то же множество решений.

Определение. Если даны две системы (совокупности) уравнений и известно, что всякое решение первой системы (совокупности) является также решением второй системы (совокупности), то говорят, что вторая система (совокупность) является следствием первой.

Пример.

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} 3x+2=0 \\ (x+y-1)(2x-y+3)=0 \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) будет следствием системы (1).

Если в данной системе заменить одно или несколько уравнений равносильными уравнениями, то получится система, равносильная данной.

Если какое-нибудь уравнение в данной системе является следствием других уравнений системы, то его можно отбросить и полученная система будет равносильна данной.

Можно также присоединить к данной системе новое уравнение, являющееся следствием других уравнений системы.

Основные приемы и методы решения систем.

Метод линейного преобразования системы.

Пусть дана система уравнений и некоторое множество чисел:

$$\begin{cases} f_1(x,y,\dots,z)=0 \\ f_2(x,y,\dots,z)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ f_k(x,y,\dots,z)=0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \dots \\ m_{1n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ \dots \\ m_{2n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m_{n1} \\ m_{n2} \\ \dots \\ m_{nn} \end{vmatrix}$$

и получена система (2):

$$\begin{cases} m_{11}f_1+m_{12}f_2+\cdots+m_{1n}f_n=0 \\ m_{21}f_1+m_{22}f_2+\cdots+m_{2n}f_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ m_{n1}f_1+m_{n2}f_2+\cdots+m_{nn}f_n=0 \end{cases}$$

Переход от системы, данной к системе (2) называют линейным преобразованием системы. Причем соответствующей теоремой устанавливается, что система (2) равносильна данной системе, если определитель

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2n} \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Метод подстановки.

Теорема. Если дана система уравнений $\begin{cases} f_1(x,y.z)=0 \\ f_2(x,y.z)=0 \\ f_3(x,y.z)=0 \end{cases}$

и если одно из неизвестных в явном виде выразить в каком- нибудь уравнении через другие неизвестные и подставить в остальные уравнения системы, то получим систему (2), равносильную системе (1):

$$\begin{cases} z=\varphi(x,y) \\ f_2\big(x,y,\varphi(x,y)\big)=0 \\ f_3\big(x,y,\varphi(x,y)\big)=0 \end{cases}$$

Переход от системы уравнений к совокупности нескольких систем уравнений основан на следующей теореме.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)f_2(x,y,z)\dots f_k(x,y,z)=0 \\ g(x,u,z)=0. \end{cases}$$

Функции $f_1,\ f_2,\dots,\ f_k$ определены на некотором множестве. Данная система равносильна совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ g_1(x,y,z)=0' \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}, \dots, \quad \begin{cases} f_k(x,y,z)=0 \\ g_k(x,y,z)=0 \end{cases}$$

на том же множестве.

Пример. Система $\begin{cases} x^4-(y+1)^4=0 \\ x+y=3 \end{cases}$

равносильна совокупности

$$\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 \\ x+y=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+(y+1)^2=0 \\ x+y=3 \end{cases}.$$

Замечание. Отметин, что система $\begin{cases} f_1=f_2 \\ g_1=g_2 \end{cases}$ вообще говоря, не равносильна системам: $\begin{cases} f_1 f_2 = g_1 g_2 \\ g_1 = g_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \\ g_1 = g_2 \end{cases}.$

Частные виды систем и их решения

а) Одно из уравнений системы является однородным.

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение осуществляется с помощью подстановки в однородное уравнение системы : *x=t y*.

Иногда бывают системы, которые после преобразований приводятся к рассмотренному выше виду.

Пример.

$\begin{cases} x^2 + xy + 4y^2 = 6 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} -7 \\ 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

После применения метода линейного преобразования получим систему:

$\begin{cases} 2x^2 - 7xy - 4y^2 = 0 \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$, равносильную данной, где первое уравнение является однородным, осуществляем подстановку *x=t y*.

В результате данная система окажется равносильной совокупности систем

$\begin{cases} x = 4y \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -0{,}5y \\ 3x^2 + 8y^2 = 14 \end{cases}$.

Ответ: $(2; 0{,}5)$, $(-2; -0{,}5)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}; 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $(\sqrt{\frac{2}{5}}; -2\sqrt{\frac{2}{5}})$

б) Симметрические системы с двумя неизвестными.

Решение путем введения новых неизвестных:

x+y==u

x y=v.

Пример.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}.$$

Эта система является симметрической, т.к. при замене x на y получается та же система.

После преобразований система примет вид:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + xy - 2(x+y) - 1 = 0 \\ xy(x+y) = 2 \end{cases}$$ или после подстановки $$\begin{cases} u^2 + v - 2u - 1 = 0 \\ uv = 2 \end{cases}.$$

Окончательное решение представлено в таблице:

x	1	1	-2	$\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})$
y	1	-2	1	$\frac{1}{2}(1 \mp i\sqrt{7})$

в) Кососимметрические системы с двумя неизвестными.

При замене x на y, а y на x может оказаться, что знак в одном из уравнений изменится на противоположный. Решение осуществляется с помощью подстановки:

$$\begin{cases} x - y = u \\ xy = v \end{cases}.$$

Предлагается самостоятельно решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 - y^3 = 7 \end{cases}.$$

§ 10. Иррациональные уравнения

Определение. Уравнение, одна или обе части которого представляют собой иррациональные выражения по отношению в некоторой неизвестной, называют иррациональным.

Алгебраические методы решения иррациональных уравнений основаны на замене данного иррационального уравнения равносильным ему рациональным уравнением или системой рациональных уравнений и неравенств. Такой прием называют исключением радикалов.

Теорема 1.

Если уравнение содержит только квадратные радикалы и, то их можно исключить последовательным уединением радикалов и возведением равнения в квадрат.

Замечание 1. Очевидно, что полученное таким образом рациональное уравнение будет следствием данного, оно может иметь посторонние корни.

Теорема 2. Если обе части уравнения *f(x)=g(x)* (1) возвести в нечетную степень, то в области действительных чисел получим новое уравнение $(f(x))^{2k+1} = (g(x))^{2k+1}$ (2) , равносильное уравнению (1).

Теорема 3. Если в области определения уравнения *f(x)=g(x)* (1) все значения функций *f(x)* и *g(x)* одного знака, то возведя это уравнение в четную степень, получим новое уравнение $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$ (2) , равносильное уравнению (1).

Пример.

$\sqrt{8x+1} = 1 + \sqrt{5x-1}$- в области определения уравнения, т.е. при $x \geq \frac{1}{5}$ обе части уравнения принимают положительные значения, поэтому уравнение $8x + 1 = 1 + 2\sqrt{5x-1} + 5x - 1$ является равносильным данному.

Теорема 4. Если в области определения уравнения *f(x)=g(x)* (1) функций *f(x)*и *g(x)* принимают значения различных знаков, то при возведении уравнения в четную степень получается уравнение $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$ (2) , которое является следствием уравнения (1).

Замечание 2. Если уравнение удовлетворяет условию теоремы 4, то его можно заменить системой, состоящей из рационального уравнения и неравенств, накладывающих такие ограничения на неизвестные, при которых обе части уравнения имеют одинаковые знаки.

Пример. Решить уравнение:

$\sqrt{x+2} = x - 10$, область определения $x \geq -2$, поэтому в области определения функция *y=x-10* может принимать и отрицательные значения, поэтому данное уравнение равносильно системе:

$\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-10\geq 0 \\ x+2=x^2-20x+100 \end{cases}$. Рациональное уравнение имеет корни 7 и 14, однако системе удовлетворяет лишь *x*= 14.

Замечание 3. Конечно, можно не пользоваться приведенными выше теоремами, но тогда все полученные решения надо проверять подстановкой в данное уравнение. Такая проверка в некоторых случаях бывает, затруднительна, особенно, когда уравнение содержит параметры.

Упражнения.

1. $\sqrt{x^2+1+x\sqrt{x-a-4}}-1=x.$

Это уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2+1+x\sqrt{x-a-4}\geq 0 \\ x^2+1+x\sqrt{x-a-4}=x^2+2x+1. \end{cases}$$

Решив уравнение, входящее в эту систему, получим $x_1=0$ и $x_2=a+8$.

Подставляем значения 0 и *a+8* в неравенства системы и убеждаемся, что при $a\leq -4$ $x=0$, при $a\geq -9$ $x=a+8$.

2.

$\frac{1}{\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $\qquad x+a>0 \qquad (1)$

$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=1$ $\qquad x-a>0 \qquad (2)$

$2\sqrt{x^2-a^2}=1-2x$ $\qquad 1-2x\geq 0 \qquad (3).$

Решая уравнение, получим $x=a^2+\frac{1}{4}$.

Подставляем это значение *x* в неравенства (1), (2), (3) для выяснения значений параметра.

$a^2+\frac{1}{4}+a>0$ при любом *a*, кроме $a=-\frac{1}{2}$.

$a^2+\frac{1}{4}-a>0$ при любом *a*, кроме $a=\frac{1}{2}$.

$1-2(a^2+\frac{1}{4})\geq 0$ при $-\frac{1}{2}\leq a\leq \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = a^2 + \frac{1}{4}$ при $-\frac{1}{2} \le a \le \frac{1}{2}$.

3. $\sqrt{x-a} - \sqrt{\frac{a^2}{x-a}} = \sqrt{x-2a}$ $\qquad x - a > 0 \qquad (1)$

$x - a - |a| = \sqrt{x-a}\sqrt{x-2a}$ $\qquad x - 2a \ge 0 \qquad (2).$

Если $a>0$, то получаем $x=2a$.

Если $a<0$, то уравнение не имеет решений.

Если $a=0$, то любое $x>0$ удовлетворяет уравнению.

4. $\sqrt{a-x} = a - \sqrt{x}.$

Ответ: $-\frac{(a-1)^2}{4}$ при $a \ge 1;\ 0$ при $a = 0.$

5. $2x + 2ax + \sqrt{x} = 0.$

Ответ: при $a < -1$ $\left\{0; \frac{1}{4(a+1)^2}\right\},$ при $a \ge -1$ $x = 0.$

§ 11. Иррациональные неравенства

1. Решить неравенство:

$\sqrt{x+14} > x + 2.$

Данное неравенство равносильно совокупности следующих равносильных систем рациональных неравенств:

$$\begin{cases} x + 14 \ge 0 \\ x + 2 \ge 0 \\ x + 14 > (x+2)^2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x + 14 \ge 0 \\ x + 2 < 0. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим $-2 \le x < 2$; решив вторую систему, получим $-14 \le x < -2$.

Ответ: $x \in [-14; 2)$.

2. Решить неравенство:

$\sqrt{x^2 - 3y - 10} < 8 - x.$

Заметим, что функция, стоящая в левой части неравенства, принимает в области определения неравенства только неотрицательные значения, поэтому случай, когда правая часть отрицательна, невозможен. Данное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2-3x-10\ge 0 \\ 8-x\ge 0 \\ x^2-3x-10<(8-x)^2. \end{cases}$$

Решив, получим: $x\in(-\infty;-2]\cup\left[5;5\frac{9}{13}\right)$.

Упражнения для самостоятельного решения

1. $3\sqrt{-x^2-x+16}>-2(2x+1)$.

Ответ: (-2;2].

2. $\frac{\sqrt{x+2}}{x}<1$.

Ответ: $[-2;0)\cup(2;+\infty)$.

3. $\sqrt{-x^2+x+2}+2x-1>0$.

Ответ: $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10};2\right]$.

Особая трудность возникает при решении иррациональных неравенств, содержащих параметр, хотя методика решения остается прежней.

Пример 1. Решить неравенство:

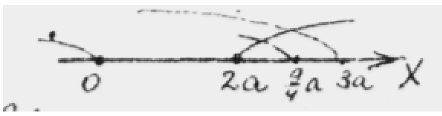
$$\sqrt{x^2-2ax}<3a-x.$$

Неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2-2ax\ge 0 \\ 3a-x\ge 0 \\ x^2-2ax<9a^2-6ax+x^2 \end{cases}$$ или после преобразований $$\begin{cases} x(x-2a)\ge 0 \\ x\le 3a \\ 4ax<9a^2. \end{cases}$$

1) *a=0*, неравенство не имеет решений.

2) *a>0*



$$\begin{cases} x\le 0 \text{ или } x\ge 2a \\ x\le 3a \\ x<\frac{9}{4}a. \end{cases}$$ при *a>0* $x\in(-\infty;0)\cup\left(2a;\frac{9}{4}a\right)$.

3) *a<0*

$$\begin{cases} x \le 2a \text{ или } x \ge 0 \\ x \le 3a \\ x < \frac{9}{4}a. \end{cases}$$

Система не имеет решений.

Ответ: при $a \le 0$ нет решений, при *a>0* $x \in (-\infty; 0) \cup \left(2a; \frac{9}{4}a\right)$.

Пример 2.

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{\frac{a^2}{x+a}} < \sqrt{x+2a}.$$

Ответ: если *a<0,* то $x \in (-2a; +\infty)$, если *a>0*, то $x \in (-a; +\infty)$, если *a=0,* то нет решения.

Самостоятельная работа №1.

<u>Решение уравнений и их систем.</u>

Вариант I

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5 \\ x^{-2}+y^{-2}=13 \end{cases};$
2. $\begin{cases} (x+1)y+x^2-3x-4=0 \\ y^2-2y-x^2+4x+2=0 \end{cases};$
3. $\begin{cases} 3x^2-xy+0{,}5x-y-y^2=15 \\ y^2-2x^2+\dfrac{2}{3}xy-\dfrac{1}{3}x-y=-8 \end{cases};$
4. $\begin{cases} x^3+y^3=7(x+y) \\ 2x^2-xy+y^2=8 \end{cases}.$

Вариант II

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x^3-3x^2y+xy^2=0 \\ x^2-xy-y^2=-1 \end{cases};$
2. $\begin{cases} x^2+y^4=5 \\ xy^2=2 \end{cases};$
3. $\begin{cases} x+y+xy=7 \\ x^2+y^2+xy=13 \end{cases};$
4. $\begin{cases} 12(x+y)^2+x=2{,}5-y \\ 6(x-y)^2+x=0{,}125+y \end{cases}.$

Вариант III

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^3-y^3=7 \end{cases};$
2. $\begin{cases} (1-x)y+x^2+2x-3=0 \\ x^2+2x-y^2+3y-5=0 \end{cases};$
3. $\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2=2 \\ x^2-3xy+1{,}5y^2=1 \end{cases};$
4. $\begin{cases} x^3-y^3=x-y \\ x^2+xy=4y^2-4 \end{cases}.$

Вариант IV

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x^3 - 9xy^2 = 0 \\ 3x^2 - xy + y^2 = 25 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x^2 y + xy^2 = 6 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} (x+y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x-y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases}$.

<u>Нулевой вариант</u>

1. $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + y^2 = 2 \\ x^2 - 3xy + 1{,}5y^2 = 1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} (x+1)y + x^2 - 3x - 4 = 0 \\ y^2 - 2y - x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} (x+y)^2 + 2x = 35 - 2y \\ (x-y)^2 - 2y = 3 - 2x \end{cases}$.

<u>Решение нулевого варианта</u>

1. $$\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^4 = 9 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y^2)^2 = 9 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x + y^2 = 3 \\ x + y^2 = -3 \end{array}\right. \\ xy^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y^2 = 3 \\ xy^2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y^2 = -3 \\ xy^{2=2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y^2 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -i \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = i \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = -i\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = i\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;-\sqrt{2})$; $(1;\sqrt{2})$; (2;1); (2;-1); (-2;-i); (-2;i); (-1;-i$\sqrt{2}$); (-1;i$\sqrt{2}$).

2. $\begin{cases} 2x^2-2xy+y^2=2 \\ x^2-3xy+1{,}5y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2xy+y^2=2 \\ 2x^2-6xy+3y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4xy-2y^2=0 \\ 2x^2-2xy+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(2x-y)=0 \\ 2x^2-2xy+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ 2x^2-2xy+y^2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-y=0 \\ 2x^2-2xy+y^2=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2x \\ x^2=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1;0); (1;0); (-1;-2); (1;2)$.

3. $\begin{cases} (x+1)y+x^2-3x-4=0 \\ y^2-2y-x^2+4x+2=0 \end{cases}$;

$$\begin{cases} y=\dfrac{-x^2+3x+4}{x+1} \\ y^2-2y-x^2+4x+2=0 \end{cases}.$$

Первое уравнение полученной системы неравносильно первому уравнению исходной системы, так как при $x=-1$ оно теряет смысл, в то время как для первого уравнения исходной системы все пары вида $(-1,\alpha)$, где $\alpha \in C$, является его решениями. Возможна потеря решений. Ими могут быть лишь пары, удовлетворяющие второму уравнению системы при $x=-1$. Подставим значение (-1) во второе уравнение системы, получим уравнение

$y^2-2y-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=3 \end{array}\right.$. Таким образом, пары чисел (-1; 1) и (-1; 3) являются решениями данной системы уравнений, и их мы могли бы потерять, решая методом подстановки данную систему уравнений. Продолжим решение системы (теперь уже при $x \neq -1$):

$$\begin{cases} y=-\dfrac{(x+1)(x-4)}{x+1} \\ y^2-2y-x^2+4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ (-x+4)^2-2(-x+4)-x^2+4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x^2-8x+16+2x-8-x^2+4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ -2x=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=5 \end{cases}.$$

Ответ: (-1; 1); (-1; 3); (5; -1).

4. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y \\ (x-y)^2-2y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+2(x+y)-35=0 \\ (x-y)^2+2(x-y)-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=u \\ x-y=v \\ u^2+2u-35=0 \\ v^2+2v-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = y = u \\ x - y = v \\ \left[\begin{array}{l} u = -7 \\ u = 5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} v = -3 \\ v = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y = -7 \\ x - y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y = 5 \\ x - y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x = -10 \\ y = -7 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = -6 \\ y = -7 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 2 \\ y = 5 - x \end{cases} \\ \begin{cases} 2x = 6 \\ y = 5 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (-5; -2); (-3;-4); (1;4); (3;2).

Самостоятельная работа № 2.

<u>Рациональные неравенства.</u>

Вариант I

Решите неравенства:

1. $(x^2 - 1)^3 (x^2 + 2x - 3)(x^3 - 8) < 0$;
2. $(x^4 - 16)^3 (x^2 + 2x - 8)(x^2 - 5x + 4) \geq 0$;
3. $\dfrac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 + 7x - 8} \geq 0$;
4. $\dfrac{3x - 5}{x - 2} \geq x + 1$;
5. $ax - a^2 < x - 1$;
6. $a^2 x - a < 25x + 5$.

Вариант II

Решите неравенства:

1. $(x^2 - 4)^3 (x^2 - x - 12)(x^3 + 1) \geq 0$;
2. $(x^3 - 1)(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 9)^3 < 0$;
3. $\dfrac{(x^3 - 27)(x + 3)}{x^2 + 6x + 8} \geq 0$;
4. $\dfrac{(x^4 - 16)(x + 5)}{x^2 - 7x - 8} \geq 0$;
5. $ax + 25 > a^2 - 5x$;
6. $a^2 x - 1 < a + x$.

Вариант III

Решите неравенства:

1. $\dfrac{3x + 5}{x + 2} \geq 1 - x$;
2. $a^2 x - a < 25x + 5$;

3. $\frac{x+4}{x+3} \ge \frac{x-2}{x-1}$;
4. $a^2x+1 > a+x$;
5. $(x^2-4)^3(x^2-2x-8)(x^3+125) > 0$;
6. $(x^3+8)(x^2+6x+8)(x^2-9)^3 \ge 0$.

Вариант IV

Решите неравенства:

1. $\frac{x^3+3x^2+x+3}{x^2-3x-10} \le 0$;
2. $ax+9 > a^2-3x$;
3. $a^2x-a < 9x-3$;
4. $(x^2-25)^3(x^2+2x-15)(x^3+64) \ge 0$;
5. $(x-8)^2(x^2-4)(x-6)^3(x^2+27) > 0$;
6. $\frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2-5x+6} \le 0$.

Вариант V

Решите неравенства:

1. $(x^3-1)^3(x^2-6x-7)(x+3)^4 \ge 0$;
2. $(x^4-81)^3(x^2+5x+6)(x^2-x-20) < 0$;
3. $\frac{(x^3-64)(x+4)}{x^2+5x+6} \le 0$;
4. $\frac{(x^3+8)(x-1)}{x^2+x-12} \le 0$;
5. $a^2x-a < 9x-3$;
6. $a^2x-2 > a+4x$.

Нулевой вариант

Решите неравенства:

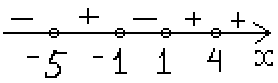
1. $(x^3-64)(x^2+x-20)(x^2-1)^3 > 0$;
2. $(x^3-27)(x^2-5x+6)(x^2-16)^3 \ge 0$;
3. $\frac{x+1}{x-1} \ge \frac{x+2}{x+1}$;
4. $\frac{(x^4-81)(x-4)}{x^2-3x-10} \le 0$;
5. $a^2x+3 < 9x+a$;
6. $ax+4 > a^2-2x$.

Решение нулевого варианта

1. $(x^3-64)(x^2+x-20)(x^2-1)^3 > 0$.

Решение.

$(x-4)(x+5)(x-4)(x-1)(x+1)>0$



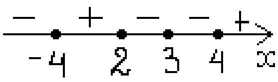
Итак, $x\in(-5;-1)\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$.

Ответ: $(-5;-1)\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$.

2. $(x^3-27)(x^2-5x+6)(x^2-16)^3\ge 0$.

Решение.

$(x-3)(x-3)(x-2)(x+4)(x+4)\ge 0$



Итак, $x\in[-4;2]\cup[4;+\infty)$.

Ответ: $[-4;2]\cup[4;+\infty)$.

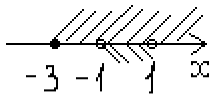
3. $\dfrac{x+1}{x-1}\ge\dfrac{x+2}{x+1}$.

Решение.

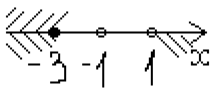
$\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x+2}{x+1}\ge 0$;

$\dfrac{x^2+2x+1-(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)}\ge 0$;

$\dfrac{x+3}{(x-1)(x+1)}\ge 0$;



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+3\ge 0\\(x-1)(x+1)<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+3\le 0\\(x-1)(x+1)>0\end{cases}\end{array}\right.$$

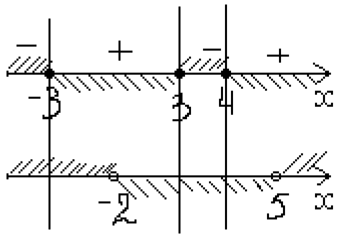


$$\left[\begin{array}{l}-1<x<1\\x\le -3\end{array}\right..$$

Ответ: $(-\infty;-3]\cup(-1;1)$.

4. $\dfrac{(x^4-81)(x-4)}{x^2-3x-10}\le 0$.

Решение.



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+3)(x-3)(x-4)\le 0\\ (x+2)(x-5)>0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+3)(x-3)(x-4)\ge 0\\ (x+2)(x-5)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ -2<x\le 3.\\ 4\le x<5\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-3]\cup(-2;3]\cup[4;5)$.

5. $a^2x+3<9x+a$.

Решение.

$(a^2-9)x<a-3$

1) $a^2-9>0$: $\quad x>\dfrac{1}{a+3}$, т.е. $a\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$;

2) $a^2-9<0$: $\quad x<\dfrac{1}{a+3}$, т.е. $a\in(-3;3)$;

3) $a=-3$: решений нет;

4) $a=3$: решений нет.

6. $ax+4>a^2-2x$.

Решение.

$(a+2)x>a^2-4$

1) $a+2>0$: $\quad x>a-2$;

2) $a+2<0$: $\quad x<a-2$

3) $a=-2$: решений нет.

Самостоятельная работа № 3.
<u>Уравнения и неравенства с модулями.</u>

Вариант I

Решите уравнения:

1. $|5-3x|=2x+1$;
2. $|3x-8|-|3x-2|=6$;

Решите неравенства:

3. $|2x+5|<7-x$;
4. $\left|\dfrac{x-2}{2x+5}\right|\ge -8$.

Вариант II

Решите уравнения:

1. $|2x-3|=3-2x$;
2. $|x-1|+|x-3|=2x-4$;

Решите неравенства:

3. $|3x-7|\le -4$;
4. $3x+|2-x|\le 5$.

Вариант III

Решите уравнения:

1. $|7x-1|=2x+4$;
2. $|x+1|+|2-x|=|x+3|$;

Решите неравенства:

3. $|3-2x|\ge |4x-9|$;
4. $|3x-4|>-5$.

Вариант IV

Решите уравнения:

1. $|9x-8|=4x+1$;
2. $x^2=|1-2x^2|$;

Решите неравенства:

3. $|x-1|>|3x-1|-10$;
4. $\left|\dfrac{3x+2}{7x-1}\right|>-2$.

Вариант V

Решите уравнения:

1. $x^2-7=|3x-7|$;
2. $|2x+5|=|x-2|$;

Решите неравенства:

3. $|x-2|+|3-x|>2+x$;
4. $|6x|>3$.

Нулевой вариант

Решите уравнения:

1. $|3x-5|=5-3x$;
2. $|x-1|+|x-2|=1$;

Решите неравенства:

3. $|2x-5|<1$;

4. $|x+2|+|x-5|>11$.

Решение нулевого варианта

1. $|3x-5|=5-3x$

Решение.

$$(|3x-5|=5-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5 \le 0 \\ -(3x-5)=5-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \le 5 \\ 0 \cdot x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{3} \\ 0=0 \end{cases}.$$

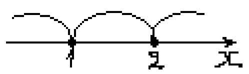
Итак, $x \in \left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{5}{3}\right]$.

2. $|x-1|+|x-2|=1$

Решение.

Числа 1 и 2 – нули подмодульных выражений, следовательно



1) $x<1$: $1-x+2-x=1$

$2x=2$

$x=1$ - не является корнем

2) $1 \le x < 2$: $x-1+2-x=1$

$1=1$ - тождество, следовательно $x \in [1;2)$ - решение данного уравнения.

3) $x \ge 2$: $x-1+x-2=1$

$2x=4$

$x=2$ - корень уравнения

Следовательно $x \in [1;2]$ - решение данного уравнения.

Ответ: $[1;2]$.

3. $|2x-5|<1$

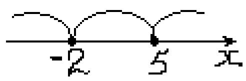
Решение.

$$(|2x-5|<1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5<1 \\ 2x-5>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<6 \\ 2x>4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow 2<x<3.$$

Ответ: (2; 3).

4. $|x+2|+|x-5|>11$

Решение.

Числа -2 и 5 – нули подмодульных выражений, следовательно 

Данное неравенство равносильно совокупности трех систем

$$|x+2|+|x-5|>11 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x-2+5-x>11\\ x<-2\end{cases}\\ \begin{cases}x+2+5-x>11\\ -2\le x<5\end{cases}\\ \begin{cases}x+2+x-5>11\\ x\ge 5\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x<-8\\ x<-2\end{cases}\\ \begin{cases}7>11\\ -2\le x<5\end{cases}\\ \begin{cases}2x>14\\ x\ge 5\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-4\\ x<-2\end{cases}\\ \begin{cases}7>11\\ -2\le x<5\end{cases}\\ \begin{cases}x>7\\ x\ge 5\end{cases}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}x<-4\\ \theta\\ x>7\end{array}\right. .$$

Итак, $x\in(-\infty;-4)\cup(7;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-4)\cup(7;+\infty)$.

Самостоятельная работа № 4.

<u>Иррациональные уравнения и неравенства.</u>

Вариант I

Решите уравнения:

1. $\sqrt[5]{x+1-\sqrt{x-1}}=2$;
2. $\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}=3$;
3. $\sqrt[4]{3-x}=\sqrt{2x}$;
4. $\sqrt{x^2-3x+4}=x^2-3x+2$;

Решите неравенства:

5. $\sqrt{x+10}\ge x-2$;
6. $\sqrt{x^2+x-6}<x+1$;
7. $(x^2-3x-4)\sqrt{3-x}<0$;
8. $\dfrac{\sqrt{x^2-4x-5}}{x+8}\ge 0$.

Вариант II

Решите уравнения:

1. $\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x}+3=0$;

2. $\sqrt{x+\sqrt{1+x}}=1-\sqrt{x}$;

3. $\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-3}=2$;

4. $\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+2x+8}=6$;

Решите неравенства:

5. $\sqrt{2x-1}\geq 2-x$;

6. $\sqrt{x^2+7x-8}<x+3$;

7. $(x-8)\sqrt{x^2-5x-6}<0$;

8. $\dfrac{\sqrt{9-x}}{x^2-6x-16}\geq 0$.

Вариант III

Решите уравнения:

1. $\sqrt[3]{x+3-\sqrt{x+1}}=2$;

2. $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}=10$;

3. $\sqrt[4]{5-x}=\sqrt{15+x}$;

4. $2\sqrt{x^2+4x-3}=x^2+4x-6$;

Решите неравенства:

5. $\sqrt{8-x}\geq 2-x$;

6. $\sqrt{x^2-3x-4}<x-2$;

7. $(x^2-4x-5)\sqrt{3-x}<0$;

8. $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}}\geq 0$.

Вариант IV

Решите уравнения:

1. $\sqrt{4+x\sqrt{x+24}}=2+x$;

2. $\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+2=0$;

3. $\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-8}=3$;

4. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$;

Решите неравенства:

5. $\sqrt{3-x}\geq x-1$;

6. $\sqrt{x^2+2x-15}<x-1$;

7. $(x-4)\sqrt{x^2+6x-7}<0$;

8. $\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{6-x}}\geq 0$.

Вариант V

Решите уравнения:

1. $\sqrt[3]{x+5+\sqrt{3x+1}}=2$;

2. $\sqrt{x+5}-\sqrt[4]{x+5}=12$;

3. $\sqrt[4]{3-x}=\sqrt{x-1}$;

4. $5x+3\sqrt{x^2-5x+11}=x^2+1$;

Решите неравенства:

5. $\sqrt{x+4}\ge x-2$;

6. $\sqrt{x^2+3x-4}<x+1$;

7. $(x^2-6x+5)\sqrt{4-x}<0$;

8. $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x+4}\ge 0$.

Нулевой вариант

Решите уравнения:

1. $\sqrt{4+x\sqrt{2x^2+7}}-x=2$;

2. $\sqrt{x+3}-2\sqrt[4]{x+3}=8$;

3. $\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-5}=2$;

4. $\sqrt{x^2-2x+5}-x^2=3-2x$;

Решите неравенства:

5. $\sqrt{5-x}\ge x+1$;

6. $\sqrt{x^2-5x-6}<x-3$;

7. $(x-10)\sqrt{x^2-5x-14}<0$;

8. $\dfrac{x^2-4x-5}{\sqrt{x+3}}\ge 0$.

Решение нулевого варианта

1. $\sqrt{4+x\sqrt{2x^2+7}}-x=2$.

Решение.

$4+x\sqrt{2x^2+7}=x^2+4x+4$;

$x^2(2x^2+7)=x^4+8x^3+16x^2$;

$x^4-8x^3-9x^2=0$;

$x^2(x^2-8x-9)=0$;

$$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=9\\x=-1\end{array}\right.$$

Ответ: -1, 0, 9.

2. $\sqrt{x+3}-2\sqrt[4]{x+3}=8$.

Решение.

Пусть $\sqrt[4]{x+3}=t$, $t\ge 0$.

$t^2+2t-8=0$;

$t=2$ или $t=-4$ - не подходит.

Итак, $\sqrt[4]{x+3}=2$;

$x+3=16$;

$x=13$.

Ответ: 13.

3. $\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2-5}=2$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2+7+x^2-5-2\sqrt{(x^2+7)(x^2-5)}=4 \\ x^2-5\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-2=2\sqrt{(x^2+7)(x^2-5)} \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{5} \\ x\geq \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4-2x^2+1=x^4+2x^2-35 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{5} \\ x\geq \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2=36 \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{5} \\ x\geq \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{5} \\ x\geq \sqrt{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=3 \end{array}\right. .$$

Ответ: -3; 3.

4. $\sqrt{x^2-2x+5}-x^2=3-2x$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2-2x+5=(x^2-2x+3)^2 \\ x^2-2x+5\geq 0, x\in R \end{cases}$$

Пусть $x^2-2x+3=t$

$t^2-t-2=0$;

$t=-1$ или $t=2$

Итак,

$x^2-2x+3=-1$ или $x^2-2x+3=2$

нет корней

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$x=-1$.

Ответ: -1.

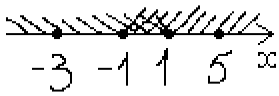
5. $\sqrt{5-x}\geq x+1$.

Решение.

$$\begin{cases} 5 - x \ge 0 \\ x + 1 \ge 0 \\ 5 - x \ge x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 5 \\ x \ge -1 \\ x^2 + 3x - 4 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le 5 \\ x \ge -1 \\ -3 \le x \le 1 \end{cases}$$



$-1 \le x \le 1$

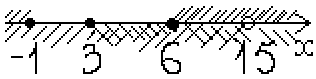
Ответ: $[-1;1]$.

6. $\sqrt{x^2 - 5x - 6} < x - 3$.

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \ge 0 \\ x - 3 \ge 0 \\ x^2 - 5x - 6 < x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 6 \end{array}\right. \\ x \ge 3 \\ x < 15 \end{cases}$$



$6 \le x < 15$

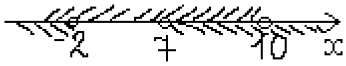
Ответ: $[6;15)$

7. $(x - 10)\sqrt{x^2 - 5x - 14} < 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x - 10 < 0 \\ x^2 - 5x - 14 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 10 \\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 7 \end{array}\right. \end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ 7 < x < 10 \end{array}\right. .$$

Ответ: $(-\infty;-2) \cup (7;10)$.

8. $\dfrac{x^2-4x-5}{\sqrt{x+3}} \geq 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x^2-4x-5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-3 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} -3<x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-3;-1] \cup [5;+\infty)$.

Самостоятельная работа № 5.

<u>Иррациональные уравнения и неравенства.</u>

Вариант I

Решите уравнения:

1. $\sqrt{x+4}-\frac{1}{2}x=2$;
2. $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{x+5} \geq 1-x$;
4. $x>\sqrt{24-5x}$.

Вариант II

Решите уравнения:

1. $\sqrt{4+2x-x^2}+2=x$;
2. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$;
4. $\sqrt{x^2+x-12}<x$.

Вариант III

Решите уравнения:

1. $2+\sqrt{9x^2+2x-3}=3x$;
2. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{5x^2+10x+1} \geq 7-x^2-2x$;

4. $x^2+\sqrt{x^2+11}<31$.

Вариант IV

Решите уравнения:

1. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$;
2. $2\sqrt{1-x^2}=x-2$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$;
4. $\sqrt{(x+2)(x-5)}>8-x$.

Вариант V

Решите уравнения:

1. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$;
2. $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{24-10x}>3-4x$;
4. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}<x+1$.

Вариант VI

Решите уравнения:

1. $\sqrt{x+16}-x+4=0$;
2. $\dfrac{3x-2}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{(2x-1)^3}$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{17-4x}+\sqrt{x-5}\le\sqrt{13x+1}$;
4. $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\ge\dfrac{7}{12}$.

<u>Нулевой вариант</u>

Решите уравнения:

1. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$;
2. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$;

Решите неравенства:

3. $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$;
4. $\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}>\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{3}{4}}$.

<u>Решение нулевого варианта</u>

1. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$

Решение.

$$ОДЗ:\begin{cases}3x^2+5x+8\geq 0\\3x^2+5x+1\geq 0\end{cases}$$

Пусть $3x^2+5x+1=t$, тогда $3x^2+5x+8=t+7$, а уравнение примет вид:
$\sqrt{t+7}-\sqrt{t}=1$, где $t\geq 0$

$$\left(\sqrt{t+7}=1+\sqrt{t}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}t+7=12\sqrt{t}+t\\1+\sqrt{t}\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{t}=6\\\sqrt{t}\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{t}=3\\\sqrt{t}\geq -1\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t=3} \Leftrightarrow t=9$$

Возвращаясь к прежней переменной, получим:

$$3x^2+5x+1=9$$
$$3x^2+5x-8=0$$
$$D=25+96=121$$
$$x_{1,2}=\frac{-5\pm 11}{6}$$
$$x_1=1\,,\qquad x_2=-\frac{8}{3}$$

Проверкой убеждаемся, что эти числа являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{3}$; 1.

2. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$

Решение.

$$ОДЗ:\begin{cases}5x+7\geq 0\\2x+3\geq 0\\3x+4\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -\frac{7}{5}\\x\geq -\frac{3}{2}\\x\geq -\frac{4}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x\geq -\frac{4}{3}$$

При $x\geq -\frac{4}{3}$ левая часть и правая являются положительными числами.

$$\sqrt{5x+7}=\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x+3}$$
$$5x+7=3x+4+2x+3+2\sqrt{3x+4}\cdot\sqrt{2x+3}$$
$$\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{3x+4}=0$$
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)=0$$
$$x_1=-\frac{3}{2}$$
$$x_2=-\frac{4}{3}$$

x_1 - посторонний корень.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

3. $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$

Решение.

$$ОДЗ:\begin{cases}x+2\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 0$$

Так как $(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})$ при $x\ge 0$ - неотрицательно, то

$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{5x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})>(4x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})$$

$$(x+2-5x)>(4x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})$$

$$2-4x>(4x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x})$$

$$(4x-2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{5x}+1)<0$$

$4x-2<0$, так как сумма трех положительных чисел больше нуля

$x<\frac{1}{2}$, так как $x\ge 0$, то $0\le x\le\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[0;\frac{1}{2}\right)$.

4. $\frac{2}{x}-\frac{1}{2}>\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}$

Решение.

$$\left(\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}}<\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{1}{2}>0\\ \frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}\ge 0\\ \frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}<\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{7-x}{2x}>0\\ \frac{16-3x^2}{4x^2}\ge 0\\ \frac{4}{x^2}-\frac{3}{4}<\frac{4}{x^2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-4}{x}<0\\ \frac{3x^2-16}{x^2}\le 0\\ \frac{2}{x}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<4\\ \frac{(x\sqrt{3}-4)(x\sqrt{3}+4)}{x^2}\le 0\\ \frac{2-x}{x}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<4\\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{4}{\sqrt{3}}\\ x\ne 0\\ \frac{x-2}{x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x\le\frac{4}{\sqrt{3}}\\ \left[\begin{array}{l}x<0\\ x>2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 2<x\le\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $2<x\le\frac{4}{\sqrt{3}}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Э.М Булатова

Элементарная математика

План университета 2023 г.

Редактор Н.В. Ефрюкова
Компьютерная верстка С.А. Бостанова

Подписано в печать
Формат 60х84/16. Бумага газетная.
Объем 0,8 усл. печ. л.
Тираж 100 экз.

Издательство Карачаево-Черкесского
государственного университета:
356202, Карачаевск, ул. Ленина, 29
ЛР № 040310 от 21.10. 1997.

Набрано и отпечатано в типографии
Карачаево-Черкесского государственного
университета:
356202, Карачаевск, ул. Ленина, 46